Formules de Taylor et développements limités

Table des matières

1 Dérivées successives

1.1 Définitions

Définition 1.1 : *Dérivées successives*

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$. Si f est dérivable k fois de suite sur I, on appelle **dérivée k-ème** de f la fonction notée $f^{(k)}$ définie par récurrence de la manière suivante :

$$f^{(0)} = f \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{(k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'.$$

Exemple 1. *On a donc :* $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)} = f''' \ldots$

Exemple 2. *Calculer les dérivées successives de f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^5$.*

Solution.

Définition 1.2 : *Fonction de classe C^k*

Soit $k \in \mathbb{N}$. On dit qu'une fonction f est **de classe** C^k sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si f est dérivable k fois sur I et si $f^{(k)}$ est continue sur I.
L'ensemble des fonctions de classe C^k sur l'intervalle I est noté $C^k(I)$.

Si une fonction est k fois dérivable sur I, sa dérivée k-ème n'est pas forcément continue sur I (mais les dérivées précédentes le sont car elles sont elles-mêmes dérivables).

Exemple 3. *Soit f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On a vu dans le chapitre Dérivabilité que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (f' est discontinue en 0).

Définition 1.3 : *Fonction de classe C^∞*

On dit qu'une fonction f est **de classe** C^∞ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si pour tout $k \in \mathbb{N}$, f est de classe C^k sur I.
L'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur l'intervalle I est noté $C^\infty(I)$.

Proposition 1.4 : *Régularité des fonctions*

(i) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f \in C^k(I)$. Alors, pour tout $i \in [\![0, k]\!]$ on a $f^{(i)} \in C^{k-i}(I)$.

(ii) Soit $f \in C^\infty(I)$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $f^{(k)} \in C^\infty(I)$.

Corollaire 1.5 : *Régularité des fonctions*

Soit I un intervalle et $k \in \mathbb{N}$. On a les implications suivantes :

$$f \in C^\infty(I) \quad \Rightarrow \quad \ldots \quad \Rightarrow \quad f \in C^{k+1}(I) \quad \Rightarrow \quad f \in C^k(I) \quad \ldots \quad \Rightarrow \quad f \in C^1(I) \quad \Rightarrow \quad f \in C^0(I).$$

Attention, ces implications ne sont pas réciproques.

1.2 Régularité des fonctions usuelles

Théorème 1.6 : *Régularité des fonctions usuelles*

Les fonctions polynomiales, fractions rationnelles, logarithme, exponentielle et fonctions trigonométriques sont de classe C^∞ sur leur ensemble de définition.
Les fonctions racine carrée et valeur absolue sont de classe C^∞ sur leur ensemble de définition sauf en 0.

Exemple 4. $x \mapsto x^5 + 3x^2 - 8$ *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$ $\quad x \mapsto \dfrac{x^3 - 5x + 1}{x - 1}$ *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R} \setminus \{1\}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}^*$ $\quad x \mapsto \ln(x)$ *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ $\quad x \mapsto e^x$ *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$ *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ $\quad x \mapsto |x|$ *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \cos(x)$ *et* $x \mapsto \sin(x)$ *sont de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$ $\quad x \mapsto \tan(x)$ *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

1.3 Dérivées successives d'un polynôme

Propriété 1.7 : *Dérivée k-ème d'un monôme*

Si $n \in \mathbb{N}$, alors

$$(X^n)^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n, \\ \dfrac{n!}{(n-k)!} X^{n-k} & \text{si } k \leq n. \end{cases}$$

Démonstration. À démontrer par récurrence en exercice. □

Corollaire 1.8 : *Dérivées successives d'un polynôme*

Si $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors si $k \geq n+1$, on a $P^{(k)} = 0$.

1.4 Opérations sur les fonctions de classe C^k ou C^∞

1.4.1 Combinaisons linéaires

Propriété 1.9 : *Combinaisons linéaires de fonctions de classe C^k ou C^∞*

(i) Soient $k \in \mathbb{N}$ et f et g deux fonctions de classe C^k sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\lambda f + \mu g \in C^k(I).$$

De plus, $(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}$.

(ii) Soient f et g deux fonctions de classe C^∞ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\lambda f + \mu g \in C^\infty(I).$$

Corollaire 1.10 : *Structure d'espace vectoriel*

Si $k \in \mathbb{N}$ et si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors $C^k(I)$ et $C^\infty(I)$ sont des espaces vectoriels (muni des opérations usuelles).

1.4.2 Produit

Théorème 1.11 : *Formule de Leibniz*

Soient $n \in \mathbb{N}$ et f et g deux fonctions de classe C^n sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors $fg \in C^n(I)$ et

$$\forall x \in I, \quad (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)\, g^{(k)}(x).$$

Pour $n = 1$, on retrouve la formule $(fg)' = f'\,g + f\,g'$.

Corollaire 1.12 : *Produit de fonctions de classe C^∞*

Si f et g sont deux fonctions de classe C^∞ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors $fg \in C^\infty(I)$.

Exemple 5 (Polynômes de Laguerre)**.** *On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$,*

$$f_n(x) = e^{-x} x^n \qquad \text{et} \qquad L_n(x) = e^x\, f_n^{(n)}(x).$$

Montrer que L_n est un polynôme de degré n et que son coefficient dominant est $(-1)^n$.

Solution.

1.4.3 Composition

Théorème 1.13 : *Composition de fonctions de classe C^k ou C^∞*

(i) Soient $I, J \subset \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k(I)$ et $g \in C^k(J)$ telle que $g(J) \subset I$. Alors

$$f \circ g \in C^k(J).$$

(ii) Soient $I, J \subset \mathbb{R}$, $f \in C^\infty(I)$ et $g \in C^\infty(J)$ telle que $g(J) \subset I$. Alors

$$f \circ g \in C^\infty(J).$$

Corollaire 1.14 : *Quotient de fonctions de classe C^k ou C^∞*

(i) Soient $I \subset \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k(I)$ et $g \in C^k(I)$ telle que g ne s'annule pas sur I. Alors

$$\frac{f}{g} \in C^k(I).$$

(ii) Soient $I \subset \mathbb{R}$, $f \in C^\infty(I)$ et $g \in C^\infty(I)$ telle que g ne s'annule pas sur I. Alors

$$\frac{f}{g} \in C^\infty(I).$$

Démonstration. Comme la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est C^∞ sur son ensemble de définition, il résulte du théorème de composition que $\dfrac{1}{g}$ est de classe C^k (ou C^∞). On conclut ensuite via le théorème de la formule de Leibniz. □

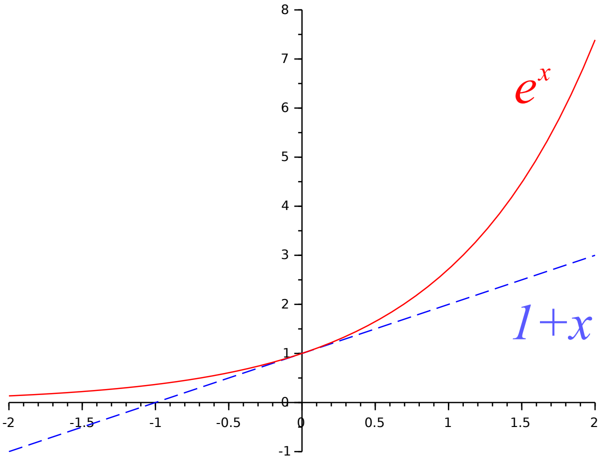
Pour montrer qu'une fonction est de classe C^k ou C^∞ sur I, il suffit donc généralement de dire qu'il s'agit d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une composée de fonctions de référence dont on connaît le caractère C^k ou C^∞.

2 Formules de Taylor

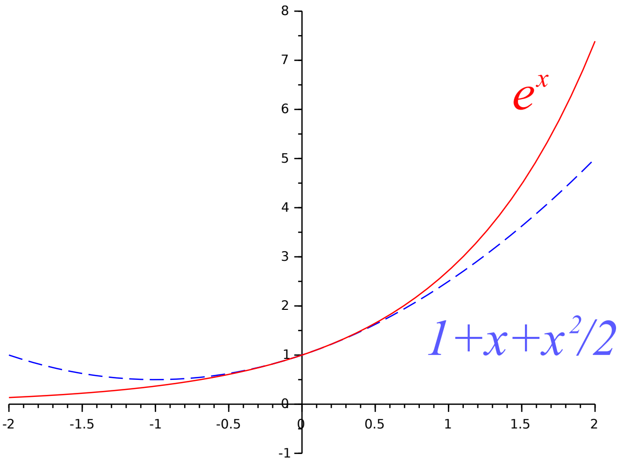
Soit f une fonction. L'objectif de la formule de Taylor est de trouver des polynômes de plus en plus précis qui sont "proches" de f au voisinage d'un point donné.

On connait déjà l'équation de la tangente en x_0 pour une fonction dérivable : $f(x)$ est "proche" de $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ au voisinage de x_0.

Exemple 6. *Ainsi on peut approcher* e^x *par le polynôme* $1 + x$ *de degré* 1 *au voisinage de* 0.



On remarquera que l'on peut améliorer l'approximation de e^x *au voisinage de* 0 *en utilisant le polynôme* $1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ *de degré* 2.



Ces polynômes ne sont proches de e^x *que localement (au voisinage du point* 0*).*

2.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 2.1 : *Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n*

Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe C^∞ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors pour $x \in I$ et $x_0 \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Démonstration. On montre ce résultat par récurrence sur n. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}_n$ la proposition :

$$\text{"}f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.\text{"}$$

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^0}{0!} f^{(0+1)}(t)\,dt,$$

donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité : On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

En intégrant par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt &= \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt \\ &= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt\end{aligned}$$

ainsi

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt.$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie. □

Définition 2.2 : *Polynôme de Taylor*

Le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ est appelé **polynôme de Taylor** à l'ordre n de f en x_0.

Exemple 7. *Avec $x_0 = 0$, on a la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 :*

$$f(x) = \underbrace{f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2}_{\textit{polynôme de Taylor}} + \int_{0}^{x} \frac{(x-t)^2}{2} f'''(t)\,dt.$$

Proposition 2.3 : *Rappel : égalité de Taylor pour les polynômes*

Soient $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors pour $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k .$$

Démonstration. Comme $P^{(n+1)} = 0$, on obtient le résultat avec la formule de Taylor avec reste intégral. $\square$

Dans le chapitre sur les polynômes, cette proposition nous avait permis d'en déduire le corollaire suivant sur la caractérisation de l'ordre de multiplicité d'une racine.

Corollaire 2.4 : *Rappel : ordre de multiplicité et dérivée*

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$. Alors,

$$x_0 \text{ est d'ordre de multiplicité } m \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in [\![0, m-1]\!], P^{(k)}(x_0) = 0 \text{ et } P^{(m)}(x_0) \neq 0.$$

Démonstration. Démonstration faite dans le chapitre Polynômes. $\square$

2.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 2.5 : *Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n*

Si $n \in \mathbb{N}$ et si f est une fonction de classe C^∞ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors il existe $M \geq 0$ tel que pour $x \in I$ et $x_0 \in I$:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \right| \leq \frac{M\,|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Démonstration. Nous faisons uniquement le cas $x > x_0$. Comme $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment $[x_0, x]$, d'après le théorème des bornes, $f^{(n+1)}$ est bornée et atteint ses bornes sur $[x_0, x]$. On note $M = \sup\limits_{t \in [x_0, x]} |f^{(n+1)}(t)|$, alors d'après l'inégalité triangulaire

$$\left| \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt \right| \leq \int_{x_0}^{x} \left| \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right| dt \leq M \int_{x_0}^{x} \left| \frac{(x-t)^n}{n!} \right| dt.$$

On conclut avec $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \left| \frac{(x-t)^n}{n!} \right| dt = \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$. $\square$

L'inégalité de Taylor-Lagrange est une généralisation de l'inégalité des accroissements finis, puisque si $n = 0$ on retrouve

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M\,|x - x_0| \quad \text{avec } M = \sup_{t \in [x_0, x]} |f'(t)|.$$

Exemple 8. *Pour $x \in [0, 1]$, montrer que*

$$|e^x - 1 - x| \leq \frac{e}{2} x^2.$$

Solution.

2.3 Formule de Taylor-Young

Enfin, si l'on ne veut pas détailler l'expression du reste, on a la formule suivante :

Théorème 2.6 : *Formule de Taylor-Young à l'ordre n*

Si $n \in \mathbb{N}$ et si f est une fonction de classe C^∞ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors pour $x \in I$ et $x_0 \in I$:

$$f(x) \underset{x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right).$$

Démonstration. On a

$$\frac{M\, |x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \underset{x_0}{=} o\left((x - x_0)^n\right).$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n, on en conclut la formule de Taylor-Young à l'ordre n. □

Remarque 2.7 : *Cas particulier : formule de Taylor-Young à l'ordre n en 0*

Si $n \in \mathbb{N}$ et si f est une fonction de classe C^∞ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant 0, alors pour $x \in I$:

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o\left(x^n\right).$$

3 Développements limités

Grâce au théorème de Taylor-Young qui précède, on peut décrire le comportement d'une fonction de classe C^∞ au voisinage d'un point x_0 par un polynôme de degré n et un reste qui est négligeable devant $(x - x_0)^n$. Ce type de description correspond à la notion de développement limité que l'on précise ici.

3.1 Définition

Définition 3.1 : *Développement limité à l'ordre n*

On dit qu'une fonction f définie au voisinage d'un réel x_0 admet un **développement limité d'ordre** n **en** x_0, abrégé en $DL_n(x_0)$, lorsqu'il existe $n+1$ réels a_0, a_1, ..., a_n tels que, au voisinage de x_0 :

$$f(x) \underset{x_0}{=} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k}_{\text{partie régulière du développement limité}} + \underbrace{o\left((x - x_0)^n\right)}_{\text{reste du développement limité}}$$

Un développement limité est une égalité locale, valable uniquement lorsque x est au voisinage de x_0.

Remarque 3.2 : *Cas particulier : développement limité à l'ordre n en 0*

f admet un développement limité à l'ordre n en 0 s'il existe $n+1$ réels a_0, a_1, ..., a_n tels que, au voisinage de 0 :

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right)$$

Exemple 9. *La relation $f(x) \underset{0}{=} 1 - x + o(x)$ est un développement limité de f à l'ordre 1 en 0.*

Théorème 3.3 : *Unicité du développement limité*

Si une fonction admet un développement limité, alors il est unique.

Démonstration. Si au voisinage de x_0,

$$f(x) \underset{x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k \left(x - x_0\right)^k + o\left(\left(x - x_0\right)^n\right) \underset{x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k \left(x - x_0\right)^k + o\left(\left(x - x_0\right)^n\right),$$

alors

$$(*) \qquad \sum_{k=0}^{n} \left(a_k - b_k\right)\left(x - x_0\right)^k \underset{x_0}{=} o\left(\left(x - x_0\right)^n\right).$$

Or, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $(x - x_0)^k$ n'est pas négligeable devant $(x - x_0)^n$ au voisinage de x_0. Donc l'équation $(*)$ n'est vraie que si pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = b_k$. □

Proposition 3.4 : *Existence des développements limités*

Si f est une fonction de classe C^∞ au voisinage d'un réel x_0, alors f admet des développements limités à tout ordre en x_0.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule de Taylor-Young à l'ordre n, on a :

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

□

Propriété 3.5 : *Parité*

Si f est paire (resp. impaire) et que f admet un développement limité d'ordre n en 0, alors la partie régulière du développement limité de f en 0 ne comporte que des puissances paires (resp. impaires).

Démonstration. Si f est paire et que

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k + o\left(x^n\right) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k \left(-x\right)^k + o\left(x^n\right)$$

Par unicité du développement limité, $a_k = 0$ si k est impair. On procède de même pour f impaire. □

Méthode 3.6 : *Se ramener à un problème en* 0

Soient $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage de x_0. On pose g la fonction définie au voisinage de 0 par

$$g(h) = f(x_0 + h) \text{ avec } h \text{ au voisinage de } 0.$$

f admet un $DL_n(x_0)$ si et seulement si g admet un $DL_n(0)$. Dans ce cas,

$$f(x) \underset{x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k \left(x - x_0\right)^k + o\left(\left(x - x_0\right)^n\right) \quad \Leftrightarrow \quad g(h) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + o\left(h^n\right).$$

Par la suite, on se ramènera toujours à un développement limité en 0.

3.2 Développements limités usuels en 0

Il faut connaître par cœur les formules suivantes qui donnent les développement limités des fonctions usuelles en 0. Tous ces résultats se retrouvent grâce à la formule de Taylor-Young.

3.2.1 Les fonctions exponentielle et logarithme népérien

Théorème 3.7 : *Exponentielle*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le $DL_n(0)$ de la fonction exponentielle est donné par :

$$e^x \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o\left(x^n\right).$$

Exemple 10. *Pour $n = 2$, on obtient* $e^x \underset{0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$.

Théorème 3.8 : *Logarithme*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le $DL_n(0)$ de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est donné par :

$$\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right) \underset{0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o\left(x^n\right).$$

Exemple 11. *Pour $n = 3$, on obtient* $\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$.

Exemple 12. *Pour $n = 2$, on obtient* $\ln(t) \underset{1}{=} (t-1) - \dfrac{(t-1)^2}{2} + o\left((t-1)^2\right)$.

Théorème 3.9 : *Puissance*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, le $DL_n(0)$ de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est donné par :

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &\underset{0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o\left(x^n\right) \\ &\underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + o\left(x^n\right) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha-i)\right)x^k + o\left(x^n\right).\end{aligned}$$

Exemple 13. *Pour $n = 2$ et $\alpha = \dfrac{1}{2}$, on obtient* $\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + o\left(x^2\right)$.

Exemple 14. *Pour $n = 2$ et $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, on obtient* $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{0}{=} 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{8}x^2 + o\left(x^2\right)$.

Corollaire 3.10 : *Cas particulier important : $\alpha = -1$*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le $DL_n(0)$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est donné par :

$$\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o\left(x^n\right) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o\left(x^n\right).$$

Si x est au voisinage de 0, $-x$ l'est également. Ce qui nous permet d'écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o\left(x^n\right) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o\left(x^n\right).$$

3.2.2 Les fonctions trigonométriques

Théorème 3.11 : *Cosinus (développement limité à un ordre impair)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le $DL_{2n+1}(0)$ de la fonction cosinus est donné par :

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+1}\right).$$

Comme la fonction cosinus est paire, la partie régulière du développement limité ne comporte que des puissances paires (voir propriété 3.5).

Exemple 15. *Pour $n = 1$, on obtient le $DL_3(0)$ de la fonction cosinus :*

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right).$$

Remarque 3.12 : *Troncature du développement limité du cosinus (développement limité à un ordre pair)*

En tronquant le $DL_{2n+1}(0)$ de la fonction cosinus (voir propriété 3.15), on obtient son $DL_{2n}(0)$:

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n}\right).$$

Exemple 16. *On obtient alors le $DL_2(0)$ de la fonction cosinus :*

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right).$$

Théorème 3.13 : *Sinus (développement limité à un ordre pair)*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le $DL_{2n+2}(0)$ de la fonction sinus est donné par :

$$\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right).$$

Comme la fonction sinus est impaire, la partie régulière du développement limité ne comporte que des puissances impaires (voir propriété 3.5).

Exemple 17. *Pour $n = 2$, on obtient le $DL_6(0)$ de la fonction sinus :*

$$\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o\left(x^6\right).$$

Remarque 3.14 : *Troncature du développement limité du sinus (développement limité à un ordre impair)*

En tronquant le $DL_{2n+2}(0)$ de la fonction sinus (voir propriété 3.15), on obtient son $DL_{2n+1}(0)$:

$$\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right).$$

Exemple 18. *On obtient alors le $DL_5(0)$ de la fonction sinus :*

$$\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o\left(x^5\right).$$

3.3 Opérations sur les développements limités

On peut trouver les développements limités de la plupart des fonctions à partir des développements limités précédents et des règles de calculs suivantes :

Propriété 3.15 : *Règles de calcul*

On suppose que f et g admettent toutes les deux un $DL_n(0)$:

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o\left(x^n\right).$$

- (Troncature) Si $p \in [\![0, n]\!]$, alors f admet un $DL_p(0)$ et

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{p} a_k x^k + o\left(x^p\right).$$

- (Combinaison linéaire) Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + \mu g$ admet un $DL_n(0)$ et

$$\lambda f(x) + \mu g(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \left(\lambda a_k + \mu b_k\right) x^k + o\left(x^n\right).$$

- (Produit) fg admet un $DL_n(0)$ et

$$f(x)\, g(x) \underset{0}{=} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k x^k\right)}_{\text{à développer seulement jusqu'à la puissance n}} + o\left(x^n\right).$$

Exemple 19. *Si* $f(x) \underset{0}{=} 2 - x + 3x^2 + 8x^3 + o\left(x^3\right)$*, alors on obtient un* $DL_2(0)$ *en tronquant de la manière suivante :*

$$f(x) \underset{0}{=} 2 - x + 3x^2 + o\left(x^2\right).$$

Exemple 20. *Déterminer le* $DL_3(0)$ *de la fonction* f *définie par*

$$f(x) = 2\, e^x + 3 \sin(x).$$

Solution.

Exemple 21. *Déterminer le* $DL_3(0)$ *de la fonction* f *définie par*

$$f(x) = e^x \ln(1 + x).$$

Solution.

Exemple 22. *Déterminer le* $DL_7(0)$ *de la fonction* f *définie par*

$$f(x) = x^4\, cos(x).$$

Solution.

3.4 Utilisation des développements limités

3.4.1 Régularité d'une fonction

Théorème 3.16 : *Continuité et développement limité*

Si f est une fonction définie au voisinage de x_0, alors

$$f \text{ est continue en } x_0 \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ admet un développement limité d'ordre } 0 \text{ en } x_0.$$

Dans ce cas : $f(x) \underset{x_0}{=} f(x_0) + o(1)$.

Théorème 3.17 : *Dérivabilité et développement limité*

Si f est une fonction définie au voisinage de x_0, alors

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ admet un développement limité d'ordre } 1 \text{ en } x_0.$$

Dans ce cas : $f(x) \underset{x_0}{=} f(x_0) + a\,(x - x_0) + o(x - x_0)$ avec $a = f'(x_0)$.

Cependant, si f admet un développement limité d'ordre 2 en x_0, elle n'est pas forcément deux fois dérivable en x_0.

Exemple 23. *Soit f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & \textit{si } x \neq 0, \\ 0 & \textit{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que f admet un développement limité d'ordre 2 en 0 mais n'est pas dérivable deux fois en 0.

Solution.

3.4.2 Recherche d'équivalents et de limites

Proposition 3.18 : *Equivalence et développement limité en 0*

Si f admet un $DL_n(0)$ tel que

$$f(x) \underset{0}{=} a_p\,x^p + a_{p+1}\,x^{p+1} + \cdots + a_n\,x^n + o\left(x^n\right) \underset{0}{=} \sum_{k=p}^{n} a_k\,x^k + o\left(x^n\right) \text{ avec } a_p \neq 0,$$

alors

$$f(x) \underset{0}{\sim} a_p\,x^p.$$

$f(x)$ est équivalent au premier terme non nul de son développement limité en 0.

Exemple 24. *On retrouve la plupart des équivalents usuels au voisinage de 0 du chapitre équivalence, négligeabilité avec $\alpha \neq 0$:*

$$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x \qquad e^x - 1 \underset{0}{\sim} x \qquad (1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$$

$$\sin(x) \underset{0}{\sim} x \qquad 1 - \cos(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

Méthode 3.19 : *Comment lever une indéterminée ?*

Nous savons que l'équivalence des fonctions n'est pas compatible avec la somme. Aussi, pour chercher un équivalent ou la limite d'une somme, il convient de passer par les développements limités.

Exemple 25. *Calculer* $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$.

Solution.

Dans la résolution de cet exemple, en disant que $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$, puis $\dfrac{1}{\ln(1+x)} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x}$, on ne peut pas soustraire les équivalents pour dire que la limite vaut 0.

3.4.3 Position locale de la courbe par rapport à sa tangente

Proposition 3.20 : *Tangente et développement limité*

Si f admet un développement limité d'ordre 1 tel que

$$f(x) \underset{x_0}{=} a_0 + a_1\,(x-x_0) + o(x-x_0),$$

alors la droite d'équation $y = a_0 + a_1\,(x-x_0)$ est tangente à (C_f) au voisinage de x_0.

On remarque que la meilleure approximation de f en x_0 est la fonction dont le graphe est la tangente au graphe de f en x_0.

Méthode 3.21 : *Position locale de la courbe par rapport à sa tangente*

Si f admet un développement limité d'ordre k avec $k \geq 2$ tel que $a_k \neq 0$

$$f(x) \underset{x_0}{=} a_0 + a_1\,(x-x_0) + a_k\,(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^k\right)$$

alors

— Si k est pair,
  - Si $a_k > 0$, alors (C_f) est localement située au-dessus de sa tangente au voisinage de x_0.
  - Si $a_k < 0$, alors (C_f) est localement située en dessous de sa tangente au voisinage de x_0.

— Si k est impair,
  - Si $a_k > 0$, alors (C_f) est localement située au-dessus (resp. en dessous) de sa tangente au voisinage à droite (resp. à gauche) de x_0.
  - Si $a_k < 0$, alors (C_f) est localement située au-dessus (resp. en dessous) de sa tangente au voisinage à gauche (resp. à droite) de x_0.

Exemple 26. *Préciser l'équation de la tangente au point d'abscisse* 0 *et la position relative par rapport à la courbe pour les fonctions*

$$f : x \mapsto e^x \qquad g : x \mapsto \ln(1+x) \qquad h : x \mapsto \sin(x).$$

Solution.

3.4.4 Recherche d'asymptotes obliques

Définition 3.22 : *Rappel : asymptote oblique*

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) - (ax+b) = 0$, alors on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est **asymptote oblique** à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.

Méthode 3.23 : *Comment déterminer une asymptote à l'aide d'un développement limité ?*

On suppose que

$$f(x) \underset{+\infty}{=} ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

- Si $c > 0$, alors (C_f) est localement située au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.
- Si $c < 0$, alors (C_f) est localement située en dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

On utilisera le changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$ pour se ramener à un problème en 0 et utiliser les développements limités en 0.

Si $c = 0$, il faut utiliser un développement limité d'ordre supérieur.

Remarque 3.24 : *Etude similaire en $-\infty$*

L'étude est similaire en $-\infty$, cependant la position relative de (C_f) et de son asymptote est inversée.

Exemple 27. *Soit f la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}^*$ par*

$$f(x) = (x-2)\,e^{\frac{1}{x}}.$$

Déterminer les asymptotes de (C_f) au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$, puis préciser la position relative de la courbe par rapport à ces asymptotes.

Solution.